ВОЗБУДИМЫЕ МЕТАСРЕДЫ ШРЕДИНГЕРА[1]

В.Г. Лабунец, И. В. Шлыков
(Екатеринбург, ФГАОУ ВПО «Уральский федеральный университет имени первого Президента России Б.Н. Ельцина», vlabunets05@yahoo.com)

EXCITABLE SCRODINGER'S METAMEDIUM

V.G. Labunets, I.V. Schlykov

Метасреды (метаматериалы), в которых электродинамические, тепловые и другие параметры принимают "экзотические" значения (отрицательные, мнимые, комплексные, кватернионные) демонстрируют удивительное разнообразие типов динамического поведения и самоорганизации. Как все более становится понятным, такие системы не исключение: чем глубже исследователи проникают в природу сложных систем – химических, биологических или физических, тем больше обнаруживается таких примеров. Но в большей степени это относится к биологическим системам, которые по своей сути всегда далеки от равновесия и источники энергии в которых, как правило, распределены по всей среде и их параметры зачистую имеют экзотические значения. Изучение явлений в таких метасредах важно для многих областей естествознания. Общей теории мета сред пока не существует, и каждый достаточно глубоко исследованный пример мета среды, как правило, дает примеры новых типов динамики или самоорганизации.

В данной работе изучаются новые метасреды с комплексными и кватернионными коэффициентами теплопроводнасти, названными средами Шредингера. Как известно, классическое двумерные уравнения теплопроводности с источником имеет следующий вид

$$\frac{\partial w}{\partial t} = D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) + f(x,y,t), \tag{1}$$

где $f(x,y,t)$ - возбуждающий источник (входной сигнал). При нулевых начальных условиях решение записывается в виде интеграла Коши:

$$w(x,y,t) = \int_0^t \frac{1}{\left(2\sqrt{\pi D(t-\tau)}\right)^2}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}{4D^2(t-\tau)}} f(\xi,\eta,\tau)\,d\xi d\eta\right)d\tau \tag{2}$$

Интересно исследовать свойства возбудимых метасред с экзотическими коэффициентами диффузии, например, с комплексным коэффициентом $D = D_0 + iD_1$ (в частности, для $D_0 = 0, D_1 = i\dfrac{\hbar}{2m}$ получаем уравнение Шредингера, которое описывает возбуждение метасреды с мнимым коэффициентом диффузии). В более сложном случае коэффициент диффузии может быть кватернионом $D = D_0 + iD_1 + jD_2 + kD_3$, где мнимые единицы (как и в комплексном случае) могут быть эллиптическими, гиперболическими и параболическими, что дает три типа метасред Шредингера, а для кватернионного коэффициента диффузии получается $3^4 = 81$ метасреда Шредингера.

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, гранты № 11-07-12017-офи_м и 12-07-12080-офи_м

Введем разностную сетку с узлами $\left(x_n, y_m, t_k\right)$ и шагами h и τ по пространственным и временной координатам, соответственно. Аппроксимируем производную по времени $\dfrac{\partial w}{\partial t}$ разностью вперед $\dfrac{w^{k+1}(n,m)-w^{k}(n,m)}{\tau}$, а производную $\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}$ - трехточечным разностным оператором $\dfrac{w^{k}(n+1,m)-2w^{k}(n,m)+w^{k}(n,m)}{h^2}$. В результате дифференциальное уравнение (1) заменяется разностной схемой

$$\frac{w^{k+1}(n,m)-w^{k}(n,m)}{\tau}= \\ =D\left[\frac{w^{k}(n+1,m)-2w^{k}(n,m)+w^{k}(n-1,m)}{h^2}+\frac{w^{k}(n,m+1)-2w^{k}(n,m)+w^{k}(n,m-1)}{h^2}\right] \tag{3}$$

Интерпретируя $w^k(n,m)$ как состояние $(n,m)-$ячейки клеточного конечного автомата, можно записать уравнение функционирования такого автомата

$$w^{k+1}(n,m)= \\ =w^{k}(n,m)+D\frac{\tau}{h^2}\left[w^{k}(n+1,m)+w^{k}(n-1,m)-4w^{k}(n,m)+w^{k}(n,m+1)+w^{k}(n,m-1)\right] \tag{3.50}$$

Поведение автомата в существенной мере зависит от алгебраической природы числа D. Если оно вещественное $D=D_{clas}$, то автомат будет моделировать распространение тепла в двумерной пластине. Если $D=D_{quant}=a+ib=D_{clas}e^{i\varphi}$ - комплексное число, то автомат будет описывать возбуждение квантовой среды (будем называть ее средой Шредингера), которая возбуждается, когда по ней движется элементарная частица. Поведение будет в существенной мере зависеть от фазы φ. Интересно исследовать поведение автомата в том случае, когда коэффициент $D=D_{quant}=a+ib=D_{clas}e^{i\varphi}$ представляет собой обобщенное комплексное число с экзотической мнимой единицей $D=D_{quant}=a+ib$, где $i^2=k\in\mathbf{R}$. Наибольший интерес представляют три случая

$$i^2=\begin{cases}+1, & \text{двойные числа,}\\ 0, & \text{дуальные числа,}\\ -1, & \text{комплексные числа.}\end{cases} \tag{3.54}$$

Для них законы умножения выглядят следующим образом

$$\left(a+ib\right)\left(c+id\right)=\left(ac+kbd\right)+i\left(bc+ab\right)=\begin{cases}\left(ac+bd\right)+i\left(bc+ab\right), & i^2=+1,\\ ac+i\left(bc+ab\right), & i^2=0,\\ \left(ac-bd\right)+i\left(bc+ab\right), & i^2=-1.\end{cases} \tag{3.55}$$

На рис.1. показана двумерная Функции Грина в виде двумерной Гауссоиды для классического уравнения теплопроводности, описывающего возбуждение классической среды.

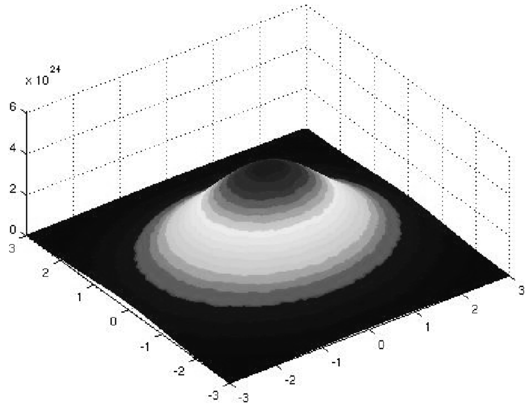

Рис. 1. Двумерная функция Грина $G(x,y,t)=\left(\frac{1}{2\sqrt{\pi at}}\right)^2 e^{-\frac{x^2+y^2}{4at}}$

На рис.2. показана двумерная функция Грина в виде двумерной чирп-функции для уравнения теплопроводности с комплексным коэффициентом диффузии, описывающего возбуждение метасреды Шредингера.

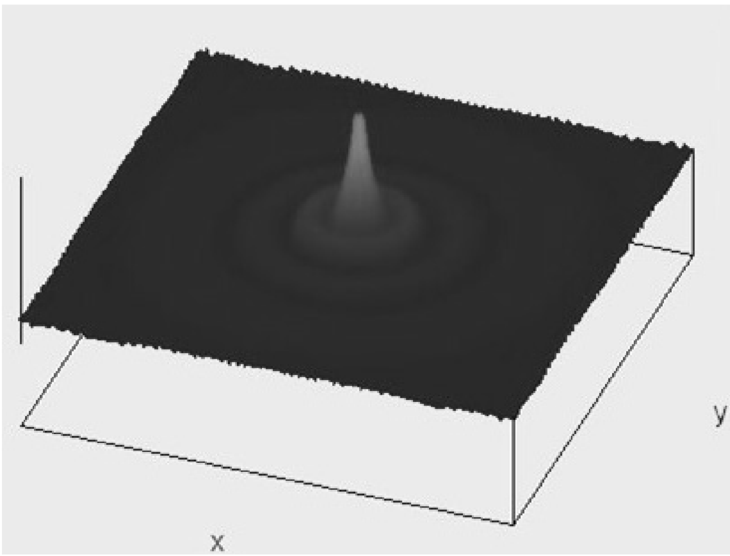

Рис.2. Функция Грина в виде двумерной чирп-функции для уравнения теплопроводности с комплексным коэффициентом диффузии, описывающего возбуждение метасреды Шредингера

Литература

1. Зализняк В. Основы вычислительной физики. М.: Техносфера, 2008, 221 С.